

## Álgebra 2 - 2015 - Lista 11

Para ser entregue no dia 4 de novembro de 2015

1. Seja  $k$  um corpo algebricamente fechado,  $C_1$  e  $C_2 \subset k^2$  curvas algébricas afins e  $\varphi : C_1 \dashrightarrow C_2$  uma aplicação racional. Mostre que se  $\varphi$  não é constante, então  $\varphi$  é dominante.
2. Seja  $k$  um corpo algebricamente fechado,  $C_1$  e  $C_2 \subset k^2$  curvas algébricas afins e  $K(C_1)$  e  $K(C_2)$  seus corpos de funções. Exiba uma bijeção entre os conjuntos

$$\left\{ \text{aplicações racionais dominantes } \varphi : C_1 \dashrightarrow C_2 \right\} e$$

$$\left\{ \text{inclusões de corpos } K(C_2) \hookrightarrow K(C_1) \right\}.$$

3. Seja  $k$  um corpo algebricamente fechado e  $f \in k[x, y]$  um polinômio irredutível de grau  $m \geq 1$  que se escreve como  $f = f_m + f_{m-1}$ , com  $f_m$  e  $f_{m-1}$  polinômios homogêneos de grau  $m$  e  $m - 1$  respectivamente. Mostre que a curva algébrica afim  $V(f) \subset k^2$  é uma curva racional.
4. Determine todas as soluções inteiras da equação

$$x^2 + y^2 = 3z^2.$$

5. Seja  $k$  um corpo algebricamente fechado de característica  $\text{char}(k) \neq 2$  e  $f = x^4 + y^4 - 1 \in k[x, y]$ . Mostre que a curva algébrica afim  $V(f) \subset k^2$  não é racional.